Statique - Application Analytique

Synthèse Mécanique

1 Théorèmes :

1.1 Principe fondamental de la statique (PFS) :

Un système matériel (S) est en **équilibre** par rapport à un repère galiléen si et seulement si la **somme des actions mécaniques (AM) extérieures** appliquées au système matériel (S) est **nulle**.

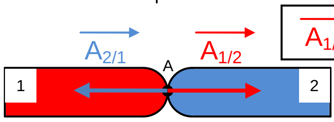
Traduction torsorielle :

$\sum_M \{\tau_{ext/s}\} = \{0\}$ la somme des torseurs d'AM extérieure au solide S appliqués au même point M est égale au torseur nul.

1.2 Actions mécaniques réciproques :

Toute AM implique l'existence d'une autre AM qui aura :

- Même norme,
- Même direction
- Sens contraire



$\overrightarrow{A_{1/2}} = -\overrightarrow{A_{2/1}}$

1.3 Simplification plane des problèmes de statique :

Afin de simplifier un problème dans un plan d'étude, les deux conditions suivantes doivent être remplies :

- Symétrie géométrique par rapport à un plan,
- Symétrie des AM par rapport à un plan,

Dans ce cas précis, pour chaque torseur d'AM, on pourra :

- **Supprimer la composante de résultante hors du plan**
- **Supprimer les composantes de moment sur le plan**

Exemple :

On simplifie le torseur d'AM suivant dans les plans $(\vec{x},\vec{y})$, $(\vec{x},\vec{z})$ et $(\vec{y},\vec{z})$.

Torseur d'origine	Simplifié sur $(\vec{x},\vec{y})$	Simplifié sur $(\vec{x},\vec{z})$	Simplifié sur $(\vec{y},\vec{z})$
$\{\tau_{1/2}\} = {}_M\begin{Bmatrix} X_{M12} & L_{M12} \\ Y_{M12} & M_{M12} \\ Z_{M12} & N_{M12} \end{Bmatrix}_R$	${}_M\begin{Bmatrix} X_{M12} & 0 \\ Y_{M12} & 0 \\ 0 & N_{M12} \end{Bmatrix}_R$	${}_M\begin{Bmatrix} X_{M12} & 0 \\ 0 & M_{M12} \\ Z_{M12} & 0 \end{Bmatrix}_R$	${}_M\begin{Bmatrix} 0 & L_{M12} \\ Y_{M12} & 0 \\ Z_{M12} & 0 \end{Bmatrix}_R$

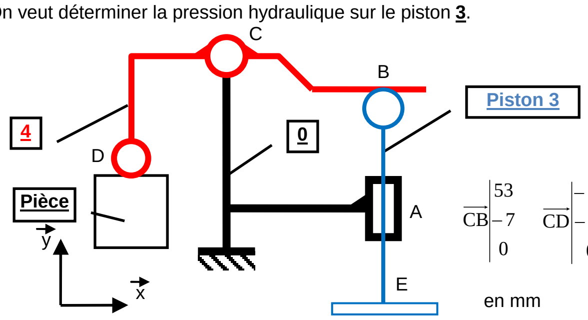
2 Problème corrigé :

2.1 Enoncé :

On donne la schématisation du mécanisme ci-dessous.
On suppose que la pièce à usiner exerce un effort de 2500 N sur le levier **4**.
Le diamètre du piston **3** est de $\varnothing_3$ = 52 mm.

Le système est plan $(\vec{x},\vec{y})$

On veut déterminer la pression hydraulique sur le piston **3**.



$\overrightarrow{CB}\begin{vmatrix} 53 \\ -7 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix} -47 \\ -53 \\ 0 \end{vmatrix}$ en mm

2.2 Stratégie :

- Isoler le levier **4** pour déterminer l'action mécanique 3/4 en B,
- Isoler le piston **3** pour déterminer l'action fluide/3 en E,
- Déterminer la pression hydraulique.

2.3 On isole le levier 4 :

2.3.1 Bilan d'Actions Mécaniques Extérieures (BAME) :

- En D, liaison ponctuelle de normale $(D,\vec{y})$ entre **pièce** et **4** :

$\{\tau_{p/4}\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{Dp4} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$ d'après énoncé, $\{\tau_{p/4}\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2500 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$

- En C, liaison pivot d'axe $(C,\vec{z})$ entre **0** et **4** :

$\{\tau_{0/4}\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{C04} & L_{C04} \\ Y_{C04} & M_{C04} \\ Z_{C04} & 0 \end{Bmatrix}_R$ après simplification $(\vec{x},\vec{y})$, $\{\tau_{0/4}\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{C04} & 0 \\ Y_{C04} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$

- En B, liaison ponctuelle de normale $(B,\vec{y})$ entre **3** et **4** :

$\{\tau_{3/4}\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{B34} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$

2.3.2 Déplacement de tous les torseurs au même point :

On choisit toujours le point qui possède le plus d'inconnue dans le BAME. Ici, il s'agit du point C.

- Déplacement de $\{\tau_{p/4}\}$ de D en C (moyen mnémotechnique : « **BABAR** ») :

$$\{\tau_{p/4}\} = {}_D\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{p/4}} \\ \overrightarrow{M_{D,p/4}} \end{Bmatrix}_R = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{p/4}} \\ \overrightarrow{M_{C,p/4}} = \overrightarrow{M_{D,p/4}} + \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{R_{p/4}} \end{Bmatrix}_R$$

Donc : $\{\tau_{p/4}\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2500 & 0 \\ 0 & -117.5 \end{Bmatrix}_R$

- Déplacement de $\{\tau_{3/4}\}$ de B en C (moyen mnémotechnique : « **BABAR** ») :

$$\{\tau_{3/4}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3/4}} \\ \overrightarrow{M_{B,3/4}} \end{Bmatrix}_R = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3/4}} \\ \overrightarrow{M_{C,3/4}} = \overrightarrow{M_{B,p/4}} + \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{R_{3/4}} \end{Bmatrix}_R$$

Donc : $\{\tau_{3/4}\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{B34} & 0 \\ 0 & 53\times10^{-3}\times Y_{B34} \end{Bmatrix}_R$

2.3.3 PFS sur 4 isolé :

A l'équilibre, la somme des AME sur **4** est nulle.

$\sum_C \{\tau_{ext/4}\} = \{0\}$, donc ${}_C\{\tau_{3/4}\} + {}_C\{\tau_{p/4}\} + {}_C\{\tau_{0/4}\} = \{0\}$

- Théorème de la résultante : $\sum \overrightarrow{R_{ext/4}} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{R_{3/4}} + \overrightarrow{R_{p/4}} + \overrightarrow{R_{0/4}} = \vec{0}$

Sur x : X_{C04} + 0 + 0 = 0
Sur y : Y_{B34} + 2500 + Y_{C04} = 0
Sur z : *Equation nulle, car simplification dans le plan (x,y).*

- Théorème du moment : $\sum \overrightarrow{M_{c,ext/4}} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{M_{C,3/4}} + \overrightarrow{M_{C,p/4}} + \overrightarrow{M_{C,0/4}} = \vec{0}$

Sur x : *Equation nulle, car simplification dans le plan (x,y).*
Sur y : *Equation nulle, car simplification dans le plan (x,y).*
Sur z : 53 x 10^{-3} x Y_{B34} – 117.5 + 0 = 0

2.3.4 Equations et résolution :

Le PFS nous donne donc le système d'équation :

$$\begin{cases} X_{C04} = 0 \\ Y_{B34} + 2500 + Y_{C04} = 0 \\ 53\times10^{-3} \times Y_{B34} - 117.5 = 0 \end{cases}$$

qui comporte 3 équations et 3 inconnues, donc soluble.

Résolution :

$$\begin{cases} X_{C04} = 0 \\ Y_{B34} = 2217 \\ Y_{C04} = -4717 \end{cases}$$

2.4 On isole le piston 3 :

On procède de la même manière pour l'étude statique du piston **3**.
Le PFS nous donne donc le système d'équation :

$$\begin{cases} X_{A03} = 0 \\ Y_{B43} + Y_{Ef3} = 0 \\ N_{A03} = 0 \end{cases}$$

en remarquant que Y_{B43} = - Y_{B34} = - 2217,

$$\begin{cases} X_{A03} = 0 \\ -2217 + Y_{Ef3} = 0 \\ N_{A03} = 0 \end{cases}$$

Résolution :

$$\begin{cases} X_{A03} = 0 \\ Y_{Ef3} = 2217 \\ N_{A03} = 0 \end{cases}$$

2.5 Détermination de la pression hydraulique :

On utilise la relation F = p.S

Après application à notre cas, $\left\|\overrightarrow{E_{fluide/3}}\right\| = p.\dfrac{\pi\phi_3^2}{4}$ avec $\overrightarrow{E_{fluide/3}}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{Ef3} = 2217 \\ 0 \end{vmatrix}$

Donc : $p = \dfrac{4\times\left\|\overrightarrow{E_{fluide/3}}\right\|}{\pi\phi_3^2}$

Après application numérique, $p = \dfrac{4\times2217}{\pi\left(52\times10^{-3}\right)^2} = 1044454 \text{ pa} = 10{,}4 \text{ bar}$