Lycée Jules FERRY Versailles	# Statique - Application Analytique	Synthèse Mécanique

1 Théorèmes :

1.1 Principe fondamental de la statique (PFS) :

Un système matériel (S) est en **équilibre** par rapport à un repère galiléen si et seulement si la **somme des actions mécaniques (AM) extérieures** appliquées au système matériel (S) est **nulle**.

Traduction vectorielle :

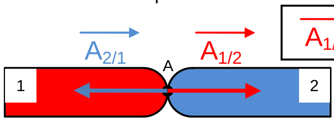
$\boxed{\sum \vec{R}_{ext/S} = \vec{0}}$ la somme des résultantes d'AM extérieure au solide S est nulle.

$\boxed{\sum \vec{M}_{B,ext/S} = \vec{0}}$ la somme des moment d'AM extérieure au solide S appliqués au même point quelconque B est nulle.

1.2 Actions mécaniques réciproques :

Toute AM implique l'existence d'une autre AM qui aura :

- Même norme,
- Même direction
- Sens contraire



$\boxed{\vec{A}_{1/2} = -\vec{A}_{2/1}}$

1.3 Simplification plane des problèmes de statique :

Afin de simplifier un problème dans un plan d'étude, les deux conditions suivantes doivent être remplies :

- Symétrie géométrique par rapport à un plan,
- Symétrie des AM par rapport à un plan,

Dans ce cas précis, pour chaque torseur d'AM, on pourra :

- **Supprimer la composante de résultante hors du plan**
- **Supprimer les composantes de moment sur le plan**

Exemple :

On simplifie les AM suivantes dans les plans $(\vec{x},\vec{y})$, $(\vec{x},\vec{z})$ et $(\vec{y},\vec{z})$.

AM d'origine	Simplifiée sur $(\vec{x},\vec{y})$	Simplifiée sur $(\vec{x},\vec{z})$	Simplifiée sur $(\vec{y},\vec{z})$
$\vec{R}_{1/2}\begin{vmatrix} X_{M12} \\ Y_{M12} \\ Z_{M12}\end{vmatrix} ; \vec{M}_{M,1/2}\begin{vmatrix} L_{M12} \\ M_{M12} \\ N_{M12}\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} X_{M12} \\ Y_{M12} \\ 0\end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{M12}\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} X_{M12} \\ 0 \\ Z_{M12}\end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 \\ M_{M12} \\ 0\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{M12} \\ Z_{M12}\end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} L_{M12} \\ 0 \\ 0\end{vmatrix}$

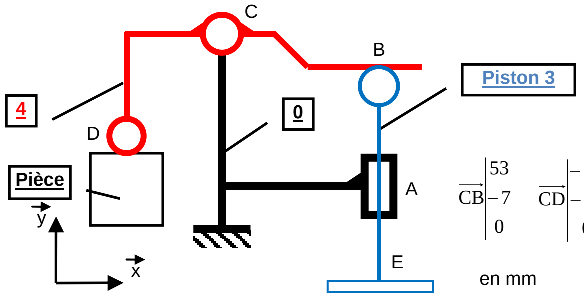
2 Problème corrigé :

2.1 Enoncé :

On donne la schématisation du mécanisme ci-dessous.
On suppose que la pièce à usiner exerce un effort de 2500 N sur le levier **4**.
Le diamètre du piston **3** est de $Ø_3$ = 52 mm.

Le système est plan $(\vec{x},\vec{y})$

On veut déterminer la pression hydraulique sur le piston **3**.



$\vec{CB}\begin{vmatrix} 53 \\ -7 \\ 0\end{vmatrix} \quad \vec{CD}\begin{vmatrix} -47 \\ -53 \\ 0\end{vmatrix}$

en mm

2.2 Stratégie :

- Isoler le levier **4** pour déterminer l'action mécanique 3/4 en B,
- Isoler le piston **3** pour déterminer l'action fluide/3 en E,
- Déterminer la pression hydraulique.

2.3 On isole le levier 4 :

2.3.1 Bilan d'Actions Mécaniques Extérieures (BAME) :

- En D, liaison ponctuelle de normale $(D,\vec{y})$ entre **pièce** et **4** :

$\vec{R}_{p/4}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{Dp4} \\ 0\end{vmatrix}$ et $\vec{M}_{D,p/4}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{vmatrix}$ d'après énoncé, $\boxed{\vec{R}_{p/4}\begin{vmatrix} 0 \\ 2500 \\ 0\end{vmatrix}}$

- En C, liaison pivot d'axe $(C,\vec{z})$ entre **0** et **4** :

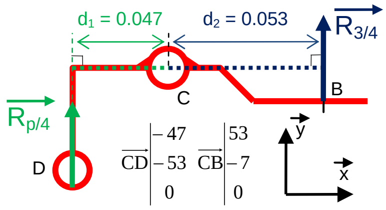
$\vec{R}_{0/4}\begin{vmatrix} X_{C04} \\ Y_{C04} \\ Z_{C04}\end{vmatrix}$ et $\vec{M}_{C,0/4}\begin{vmatrix} L_{C04} \\ M_{C04} \\ 0\end{vmatrix}$ simplification $(\vec{x},\vec{y})$, $\boxed{\vec{R}_{0/4}\begin{vmatrix} X_{C04} \\ Y_{C04} \\ 0\end{vmatrix} \text{ et } \vec{M}_{C,0/4}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{vmatrix}}$

- En B, liaison ponctuelle de normale $(B,\vec{y})$ entre **3** et **4** :

$\boxed{\vec{R}_{3/4}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{B34} \\ 0\end{vmatrix} \text{ et } \vec{M}_{B,3/4}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{vmatrix}}$

2.3.2 Expression des moments résultants au même point :

On choisit toujours le point qui possède le plus d'inconnue dans le BAME. Ici, il s'agit du point C.



$\vec{CD}\begin{vmatrix} -47 \\ -53 \\ 0\end{vmatrix} \quad \vec{CB}\begin{vmatrix} 53 \\ -7 \\ 0\end{vmatrix}$

- $\vec{M}_{C,p/4} = \vec{M}_C\,\vec{R}_{p/4}\begin{vmatrix} M_{(C,\vec{x})}\vec{R}_{p/4} = 0 \text{ (simplification plane)} \\ M_{(C,\vec{y})}\vec{R}_{p/4} = 0 \text{ (simplification plane)} \\ M_{(C,\vec{z})}\vec{R}_{p/4} = -d_1 \times \|\vec{R}_{p/4}\| = -0.047 \times 2500\end{vmatrix}$

donc : $\boxed{\vec{M}_{C,p/4}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -117.5\end{vmatrix}}$

- $\vec{M}_{C,3/4} = \vec{M}_C\,\vec{R}_{3/4}\begin{vmatrix} M_{(C,\vec{x})}\vec{R}_{3/4} = 0 \text{ (simplification plane)} \\ M_{(C,\vec{y})}\vec{R}_{3/4} = 0 \text{ (simplification plane)} \\ M_{(C,\vec{z})}\vec{R}_{3/4} = d_2 \times \|\vec{R}_{3/4}\| = 0.053 \times Y_{B34}\end{vmatrix}$

donc : $\boxed{\vec{M}_{C,3/4}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.053 \times Y_{B34}\end{vmatrix}}$

2.3.3 PFS sur 4 isolé :

A l'équilibre, la somme des AME sur **4** est nulle.

- Théorème de la résultante : $\sum \vec{R}_{ext/4} = \vec{0}$ donc $\vec{R}_{3/4} + \vec{R}_{p/4} + \vec{R}_{0/4} = \vec{0}$

Sur x : X_{C04} + 0 + 0 = 0
Sur y : Y_{B34} + 2500 + Y_{C04} = 0
Sur z : *Equation nulle, car simplification dans le plan (x,y).*

- Théorème du moment : $\sum \vec{M}_{c,ext/4} = \vec{0}$ donc $\vec{M}_{C,3/4} + \vec{M}_{C,p/4} + \vec{M}_{C,0/4} = \vec{0}$

Sur x : *Equation nulle, car simplification dans le plan (x,y).*
Sur y : *Equation nulle, car simplification dans le plan (x,y).*
Sur z : 0.053 x Y_{B34} – 117.5 + 0 = 0

2.3.4 Equations et résolution :

Le PFS nous donne donc le système d'équation :

$$\begin{cases} X_{C04} = 0 \\ Y_{B34} + 2500 + Y_{C04} = 0 \\ 0.053 \times Y_{B34} - 117.5 = 0 \end{cases}$$

qui comporte 3 équations et 3 inconnues, donc soluble.

$$\boxed{\begin{cases} X_{C04} = 0 \\ Y_{B34} = 2217 \\ Y_{C04} = -4717 \end{cases}}$$

2.4 On isole le piston 3 :

On procède de la même manière pour l'étude statique du piston **3**.
Le PFS nous donne donc le système d'équation :

$$\begin{cases} X_{A03} = 0 \\ Y_{B43} + Y_{Ef3} = 0 \\ N_{A03} = 0 \end{cases}$$

en remarquant que Y_{B43} = - Y_{B34} = - 2217,

$$\begin{cases} X_{A03} = 0 \\ -2217 + Y_{Ef3} = 0 \\ N_{A03} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} X_{A03} = 0 \\ Y_{Ef3} = 2217 \\ N_{A03} = 0 \end{cases}}$$

2.5 Détermination de la pression hydraulique :

On utilise la relation F = p.S

Après application à notre cas, $\|\vec{E}_{fluide/3}\| = p.\dfrac{\pi \phi_3^{\,2}}{4}$ avec $\vec{E}_{fluide/3}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{Ef3} = 2217 \\ 0\end{vmatrix}$

Donc : $\boxed{p = \dfrac{4 \times \|\vec{E}_{fluide/3}\|}{\pi \phi_3^{\,2}}}$

Après application numérique, $p = \dfrac{4 \times 2217}{\pi (52 \times 10^{-3})^2} = 1044454 \text{ pa} = 10{,}4 \text{ bar}$